EJERCICIOS APLICACIONES DERIVADAS **Ficha 3**

1.- **Estudia y representa la función:** $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

2.- **Estudia y representa la función:** $f(x) = x^4 - 2x^2$

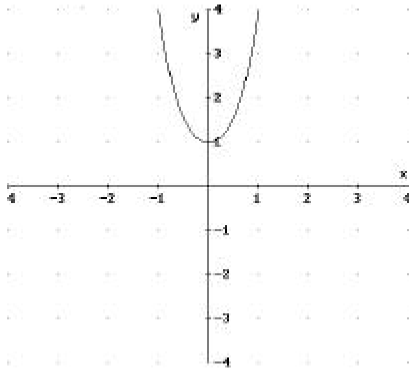
3.- **Estudia y representa la función:** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

4.- **Estudia y representa la siguiente función:** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

SOLUCIONES

1)

- $\lim_{x\to +\infty} \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to -\infty} \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) = +\infty$



- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad x^4 + 2x^2 + 1 = 0$. Cambio $x^2 = z$

$z^2 + 2z + 1 = 0$

$z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ (no nos da un valor real para x).

No corta al eje X.

  Con el eje $Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0, 1)$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x\left(x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \quad$ Punto$(0, 1)$

2)

- $\lim_{x\to +\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to -\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = +\infty$

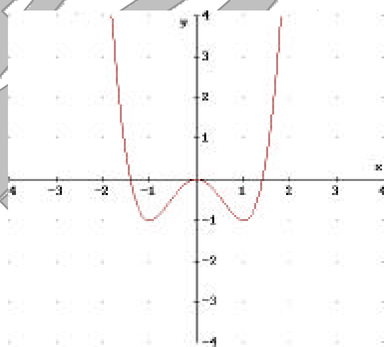
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow \quad x^4 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{2} & \rightarrow \text{ Punto } (-\sqrt{2},\ 0) \\ x = 0 & \rightarrow \text{ Punto } (0,\ 0) \\ x = -\sqrt{2} & \rightarrow \text{ Punto } (-\sqrt{2},\ 0) \end{cases}$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow$ Punto (0,0)

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \begin{cases} x = -1 & \rightarrow \text{ Punto } (-1,\ -1) \\ x = 0 & \rightarrow \text{ Punto } (0,\ 0) \\ x = 1 & \rightarrow \text{ Punto } (1,\ -1) \end{cases}$



3)

- Dominio $= \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

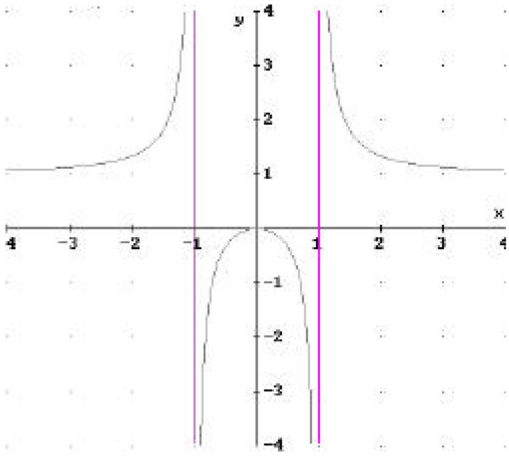
  Con el eje $Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto$(0, 0)$

  Con el eje $X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0, 0)$

- Asíntotas verticales: $x=-1,\ x=1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$



Asíntota horizontal: $y=1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$, con $y>1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=1$, con $y>1$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \ \Rightarrow\ -2x=0 \ \rightarrow\ x=0 \ \rightarrow\ \text{Punto}(0,0)$$

4)

- Dominio $=\mathbf{R}-\{2\}$
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow\ y=0 \ \rightarrow\ \frac{x^2}{x-2}=0 \ \rightarrow\ x=0 \ \rightarrow$ Punto $(0,0)$

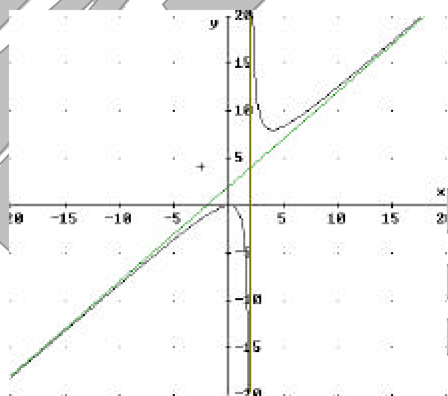
Con el eje $Y \rightarrow\ x=0 \ \rightarrow\ y=0 \ \rightarrow$ Punto $(0,0)$

- Asíntota vertical: $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

Asíntota oblicua:

$$\frac{x^2}{x-2}=x+2+\frac{4}{x-2} \quad\Rightarrow\quad y=x+2 \text{ es asíntota oblicua.}$$



Si $x\to+\infty,\ \frac{4}{x-2}>0 \ \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x\to-\infty,\ \frac{4}{x-2}<0 \ \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \ \Rightarrow\ x(x-4)=0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{Punto}(0,0) \\ x=4 \rightarrow \text{Punto}(4,8) \end{cases}$$